

Colles de Maths - semaine 19 - MP*2

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| \leq 1$.

Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p u_k\right)_p$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(u - \text{Id})$.

Indication : On pourra commencer par montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id})$.

Exercice 2 Soit E un espace euclidien, C un convexe fermé non vide de E , $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p(x) \in C$ tel que $\|x - p(x)\| = d(x, C)$.

Indication : Pour l'unicité, on pourra utiliser l'identité du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme, $2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BD^2$.

2. Montrer que pour tout $y \in C$, on a $\langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$.
3. Montrer que l'application p est 1-lipschitzienne.

Bonus : Montrer par des contre-exemples la nécessité des hypothèses.

Exercice 3 Soit E un espace euclidien, $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E autoadjoints, commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous les f_i .

Variante : En remplaçant autoadjoints par trigonalisables, montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui trigonalise tous les f_i .

Exercice 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que tPAP ait tous ses termes diagonaux égaux.

Exercice 5 Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour toute valeur propre complexe λ de A , $|\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive S telle que $S - AS^tA = B$.